ÁREA DE MATEMÁTICAS

Guía de aprendizaje n.° 4

Noveno grado

IDENTIFICACIÓN

Nombre del estudiante:	Nombre del acudiente:	Teléfono:

Fecha de entrega:	Fecha de recepción resuelto:	Fechas de trabajo en casa: Inicio	Fin	Periodo:
DÍA / MES / AÑO	DÍA / MES / AÑO	25 / 05 / 2020	19 / 06 / 2020	PRIMERO

Docentes responsables:

RAÚL EMIRO PINO, CARLOS ENRIQUE CRUZ, LIZ NEY MONTENEGRO

ACTIVIDAD A DESARROLLAR

TEMAS:

- **Primera semana:** Radicales semejantes–polígonos congruentes y polígonos semejantes–Medidas de tendencia central–Conjunto de partes de un conjunto.
- **Segunda semana:** Suma y resta de radicales–Segmentos proporcionales–Rango y desviación media–Producto cartesiano.
- **Tercera semana:** Multiplicación y división de radicales–Teorema de Tales–Varianza y desviación típica–Operaciones entre conjuntos.
- **Cuarta semana:** Taller de profundización.

ESTÁNDARES:

- Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.
- Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
- Reconozco tendencias que se presentan en conjuntos de variables relacionadas.

DERECHOS BÁSICOS DE APRENDIZAJE:

- Utiliza los números reales (sus operaciones, relaciones y propiedades) para resolver problemas con expresiones polinómicas.
- Propone un diseño estadístico adecuado para resolver una pregunta que indaga por la comparación sobre las distribuciones de dos grupos de datos, para lo cual usa comprensivamente diagramas de caja, medidas de tendencia central, de variación y de localización.

EVIDENCIAS DE APRENDIZAJE:

- Construye representaciones geométricas y numéricas de los números reales (con decimales, raíces, razones, y otros símbolos) y realiza conversiones entre ellas.
- Compara las distribuciones de los conjuntos de datos a partir de las medidas de tendencia central, las de variación y las de localización.

HORARIO DE CONSULTA: Lunes a viernes de 8 AM a 12 PM y de 3 PM a 6 PM.

Radicales semejantes

PENSAMIENTO NUMÉRICO-VARIACIONAL

Dos radicales son semejantes si tienen la misma raíz.

Si se multiplica o se divide el índice y el exponente del radical por un mismo número se obtiene otro radical semejante.

Ejemplo 1.

$\sqrt[3]{4^2}$ y $\sqrt[12]{4^8}$ son radicales semejantes porque si se multiplica el índice 3 y el exponente 2 del primer radical por el número 2 se obtiene el segundo. ■

Para que dos o más radicales de iguales índices sean semejantes **ES NECESARIO** que los radicandos (lo que está dentro del radical) sean iguales y si no lo son que se pueda obtener un radical a partir del otro como en el ejemplo 1.

Ejemplo 2.

Los radicales $\sqrt[5]{x^2}$ y $\sqrt[5]{yz^3}$ no son semejantes porque, aunque los índices de los radicales son iguales las cantidades que están dentro de los radicales son diferentes. ■

¡TEN EN CUENTA!

Un radical se puede expresar como una potencia escribiendo la cantidad que está dentro del radical con un exponente que es igual a una fracción cuyo numerador es el exponente y cuyo el denominador es el índice del radical.

Por ejemplo, $\sqrt[5]{x^3}=x^{\frac{3}{5}}$.

Ejemplo 3.

Las expresiones $3^{0.5}$, $\sqrt{3}$ y $27^{1/6}$ que son aparentemente diferentes son semejantes. Observa:

$$3^{0.5}=3^{1/2}$$

$$\sqrt{3}=\sqrt[2]{3^1}=3^{1/2}$$

$$27^{1/6}=\left(3^3\right)^{1/6}=3^{3\times1/6}=3^{3/6}=3^{1/2}$$

(Recuerda que $3^3=3\cdot3\cdot3=27$). ■

¡QUE NO SE TE OLVIDE!

Cuando multiplicamos números enteros con fracciones frecuentemente ponemos un uno como denominador del número entero y se multiplican luego las partes de arriba entre sí (numeradores) y las partes de abajo entre sí (denominadores).

Por ejemplo: $3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{1}\times\frac{1}{6}=\frac{3\times1}{1\times6}=\frac{3}{6}\xrightarrow{\text{Aquí simplificamos}}\frac{1}{2}$

Ejemplo 4.

Para saber si los radicales $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[6]{x^4}$ son equivalentes, se sigue este procedimiento:

1.° Los radicales se expresan como una potencia: $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[6]{x^4}=x^{\frac{4}{6}}$.

2.° Se comprueba que las bases sean iguales.

3.° Se verifica que las fracciones de sus exponentes sean equivalentes: $\frac{2}{3}=\frac{2\times2}{3\times2}=\frac{4}{6}$.

Por lo tanto, los radicales son semejantes. ■

Ejemplo 5.

Reduce a índice común y ordena de menor a mayor los siguientes radicales $\sqrt{3}, \sqrt[5]{2^2}$ y $\sqrt[10]{5^3}$.

Solución.

Se saca el m.c.m de los índices, es decir:

$$\text{m.c.m.}(2,5,10)=2\times5=10$$

Como el índice de $\sqrt{3}$ es 2, se multiplica por 5. Así,

$$\sqrt{3}=\sqrt[2\times5]{3^{1\times5}}=\sqrt[10]{3^5}=\sqrt[10]{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}=\sqrt[10]{243}.$$

Como el índice de $\sqrt[5]{2^2}$ es 5, se multiplica por 2. Así,

$$\sqrt[5]{2^2}=\sqrt[5\times2]{2^{2\times2}}=\sqrt[10]{2^4}=\sqrt[10]{2\cdot2\cdot2\cdot2}=\sqrt[10]{16}.$$

Como el índice de $\sqrt[10]{5^3}$ es 10, se multiplica por 1. Así,

$$\sqrt[10]{5^3}=\sqrt[10\times1]{5^{3\times1}}=\sqrt[10]{5^3}=\sqrt[10]{5\cdot5\cdot5}=\sqrt[10]{125}.$$

Luego, el orden de menor a mayor sería:

$\sqrt[10]{16}<\sqrt[10]{125}<\sqrt[10]{243}$. ■

Polígonos congruentes y polígonos semejantes

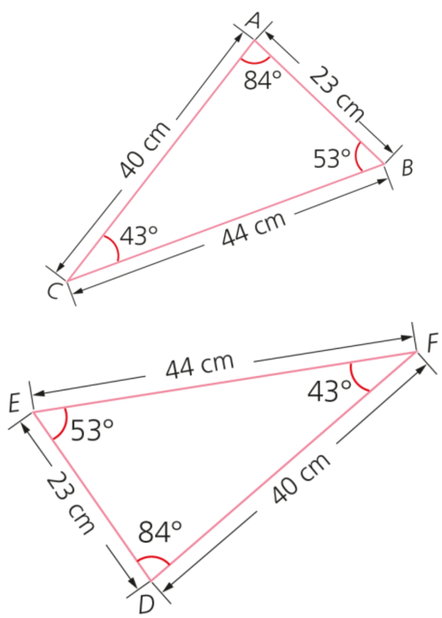
PENSAMIENTO GEOMÉTRICO-MÉTRICO

Polígonos congruentes

Dos polígonos son **congruentes** si tanto los ángulos correspondientes como los lados correspondientes son congruentes. La relación de congruencia se simboliza con $\cong$.

Ejemplo 6.

Los triángulos de las figuras siguientes son congruentes, ya que se cumple que:



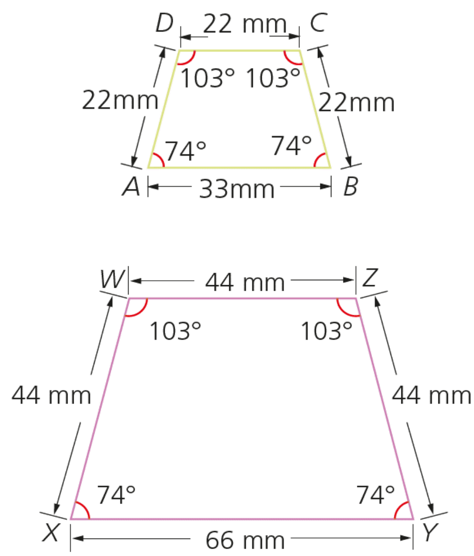
1. $AB = 23\text{ cm} = DE$; $BC = 44\text{ cm} = EF$; $AC = 40\text{ cm} = DF$. Por lo tanto,
$$\overline{AB} \cong \overline{DE},\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \text{ y } \overline{AC} \cong \overline{DF}.$$
2. $m\measuredangle A = 84° = m\measuredangle D$; $m\measuredangle B = 53° = m\measuredangle E$; $m\measuredangle C = 43° = m\measuredangle F$. Entonces,
$$\measuredangle A \cong \measuredangle D,\ \measuredangle B \cong \measuredangle E \text{ y } \measuredangle C \cong \measuredangle F.$$ ■

Polígonos semejantes

Dos polígonos son **semejantes** cuando los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. La relación de semejanza se simboliza con $\sim$. El cociente entre los lados correspondientes se llama razón de semejanza o escala. Se designa por la letra k.

Ejemplo 7.

Explica por qué los cuadriláteros de las figuras siguientes son semejantes. Indica cuál es la razón de semejanza.



En las figuras se observa que
$\measuredangle A \cong \measuredangle X; \measuredangle B \cong \measuredangle Y; \measuredangle C \cong \measuredangle Z; \measuredangle D \cong \measuredangle W$, y que

$$\frac{AB}{XY} = \frac{33\text{ mm}}{66\text{ mm}} = \frac{1}{2},\ \frac{BC}{YZ} = \frac{22\text{ mm}}{44\text{ mm}} = \frac{1}{2},\ \frac{CD}{ZW} = \frac{22\text{ mm}}{44\text{ mm}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{DA}{WX} = \frac{22\text{ mm}}{44\text{ mm}} = \frac{1}{2}.$$

Es decir, los ángulos correspondientes son congruentes y los lados correspondientes son proporcionales. Entonces, la razón de semejanza es $\frac{1}{2}$.

Así, escribimos $ABCD \sim WXYZ$. ■

Medidas de tendencia central

PENSAMIENTO ALEATORIO

Media aritmética

La **media aritmética** o **promedio** de un conjunto de datos es el cociente entre la suma de todos los datos y el número total de estos. La media aritmética la representamos con $\overline{x}$.

Ejemplo 8.

Julián hizo un recorrido diario durante su preparación para participar en una carrera. Él registró la distancia que recorrió durante una semana en la siguiente tabla.

Días	Distancia (km)
Lunes	11,4
Martes	12,1
Miércoles	12,5
Jueves	10,8
Viernes	11,3
Sábado	12,4
Domingo	11,5

Si la distancia promedio la semana anterior fue de 12,3 km, ¿se puede afirmar que esta semana obtuvo un mejor promedio?

Solución.

Para determinar el promedio de la distancia recorrida por Julián durante la semana, se suman las distancias y se divide entre el número de días.

$$\overline{x}=\frac{11{,}4+12{,}1+12{,}5+10{,}8+11{,}3+12{,}4+11{,}5}{7}$$

$$\overline{x}=\frac{82}{7}=11{,}71$$

Al comparar el promedio de distancia recorrida por Julián la semana anterior con el obtenido esta semana, se puede concluir que su promedio bajó con respecto a la semana previa, pues $11{,}71<12{,}3$. ■

Moda

La **moda** de un conjunto de datos es el dato que tiene la mayor frecuencia absoluta. La moda la representamos con $\tilde{x}$.

Ejemplo 9.

Hallemos la moda del siguiente conjunto de datos.

6 3 1 2 6 3

En el conjunto los números 6 y 3 son los que más se repiten, cada uno con dos apariciones. Entonces, decimos que el conjunto tiene dos modas y escribimos $\tilde{x}=\{3,\ 6\}$

■

Mediana

La **mediana** es el valor que ocupa la posición central de todos los datos cuando estos están ordenados de menor a mayor. La mediana la representamos con $\hat{x}$.

- Si en un estudio estadístico el número de datos es impar, la mediana es el valor central.
- Si en el estudio estadístico el número de datos es par, la mediana es la media aritmética de los dos valores centrales.

Ejemplo 10.

Hallemos la mediana para el conjunto de datos del ejemplo 9.

Solución.

Primero se ordenan los datos de menor a mayor

6 6 3 3 2 1

Como hay un número par de valores (6), se toman los dos del centro y se promedian. Así,

$$\tilde{x}=\frac{3+3}{2}=\frac{6}{2}=3. \quad ■$$

¡TEN EN CUENTA!

La media y la mediana son medidas de tendencia central únicas, sin embargo, la moda puede corresponder a dos o más valores en un conjunto de datos.

Conjunto de partes de un conjunto

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Dado un conjunto S, el conjunto de las partes de S es el conjunto de todos los subconjuntos de S. El conjunto de las partes de S se denota por $P(S)$.

Ejemplo 11.

¿Cuál es el conjunto de las partes del conjunto $A=\{0,\ 1,\ 2\}$?

Solución.

El conjunto de las partes $p(A)$ es el conjunto de los subconjuntos de A.

Por tanto,

$P(A)=\{\varnothing,\ \{0\},\ \{1\},\ \{2\},\ \{0,\ 1\},\ \{0,2\},\ \{1,\ 2\},\ A\}$.

■

¡TEN EN CUENTA!

El conjunto vacío ($\varnothing$) es subconjunto de todos los conjuntos y cualquier conjunto es subconjunto de sí mismo.

Ejemplo 12.

¿Cuál es el conjunto de las partes del conjunto vacío? ¿Cuál es el conjunto de las partes de $\{\varnothing\}$?

Solución.

El conjunto de partes del conjunto de partes del conjunto vacío tiene exactamente un subconjunto: él mismo. Por tanto, $P(\varnothing)=\{\varnothing\}$.

El conjunto $\{\varnothing\}$ tiene exactamente dos subconjuntos, a saber, $\varnothing$ y él mismo. Por tanto, $P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$. ■

Si un conjunto tiene *n* elementos, entonces el conjunto de las partes del conjunto tiene 2^n elementos. Por ejemplo, el conjunto *A* del ejemplo 1 tiene 3 elementos, por lo que su conjunto de partes tiene $2^3=8$ elementos.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

PENSAMIENTO NUMÉRICO-VARIACIONAL

1. Reduce a índice común y ordena de mayor a menor cada grupo de radicales.

a. $\sqrt{5},\ \sqrt[4]{4},\ \sqrt[6]{3}$ b. $\sqrt[4]{3},\ \sqrt[8]{7},\ \sqrt{2}$

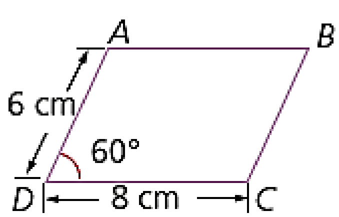
2. Indica, en cada caso, si los radicales son semejantes o no.

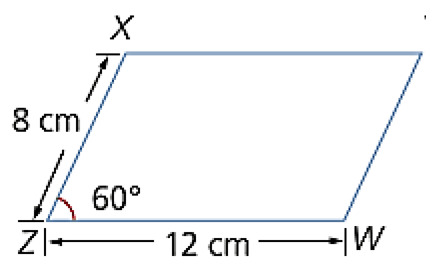
a. $\sqrt[5]{21},\ \sqrt[10]{21^2}$ b. $\sqrt[4]{7^2},\ \sqrt[30]{7^{15}}$

c. $\sqrt[8]{11^5},\ \sqrt[7]{11^6}$ d. $\sqrt[3]{35^2},\ \sqrt[12]{35^6}$

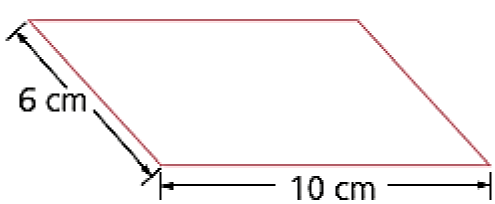
PENSAMIENTO GEOMÉTRICO-MÉTRICO

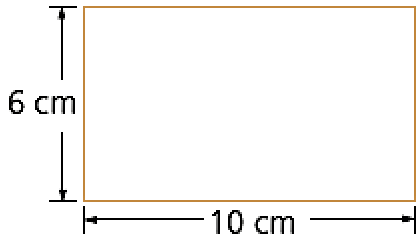
3. Comprueba si el paralelogramo *ABCD* es semejante al paralelogramo *XYWZ*.





4. Indica si son o no congruentes los cuadriláteros que se muestran a continuación.





PENSAMIENTO ALEATORIO

5. Halla la media aritmética $(\bar{x})$, la moda $(\tilde{x})$ y la mediana $(\hat{x})$ de los siguientes conjuntos de datos.

a) 2 1 4 6 3

b) 5 5 5 5 5 5 5 5

c) 7 8 4 6 7

d) 6 5 4 3 7 6 5 4 3 0 7 5

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

6. El cardinal de un conjunto A se denota con $|A|$ y es igual al número de elementos de un conjunto. Entonces, el número de elementos del conjunto de partes de A es $|P(A)|$. Halle en cada caso $P(A)$ y $|P(A)|$ según el ejemplo.

Ejemplo.

$A=\{1,3\}$

$P(A)=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{3\},\ \{1,\ 3\}\}$

$|P(A)|=4$, porque $P(A)$ tiene 4 elementos.

a. $A=\{*,\ \#,\ \%\}$

b. $B=\{c,f,d,e,r\}$

c. $C=\{x\}$

Segunda semana

Operaciones con radicales. Suma y resta

PENSAMIENTO NUMÉRICO-VARIACIONAL

Para sumar o restar radicales debe verificarse si son o no semejantes, en caso de serlo se suman o se restan los coeficientes de los correspondientes radicales semejantes y se deja el radical común sin cambio. Si los radicales no son semejantes la operación no puede realizarse.

Ejemplo 1.

Resolvamos la siguiente operación.

$\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{40}-2\sqrt[3]{5}$

Solución.

Lo primero que debe hacer es reducir los radicales de tal manera que el radicando (lo que está dentro del radical) sea un número primo. El único que necesita reducirse es el segundo.

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$40=2\times2\times2\times5=2^3\times5\Rightarrow\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{2^3\times5}=2\sqrt[3]{5}$

Luego,

$$\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{40}-2\sqrt[3]{5}=1\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}-2\sqrt[3]{5}$$
$$=1\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{5}$$

■

Ejemplo 2.

Resolver $\sqrt{18}+\sqrt{75}-2\sqrt{2}$.

Solución.

Reducimos los radicales.

18	2	75	3
9	3	25	5
3	3	5	5
1		1	

$18=2\times3\times3=2\times3^2\Rightarrow\sqrt{2\times3^2}=3\sqrt{2}$

$75=3\times5\times5=3\times5^2\Rightarrow\sqrt{3\times5^2}=5\sqrt{3}$

Luego,

$$\sqrt{18}+\sqrt{75}-2\sqrt{2}=3\sqrt{2}+5\sqrt{3}-2\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{2}+5\sqrt{3}$$

■

Segmentos proporcionales

PENSAMIENTO GEOMÉTRICO-MÉTRICO

Razón entre dos segmentos

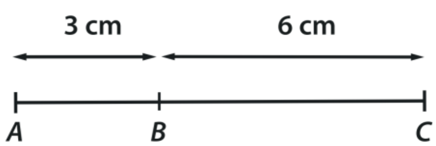
Se denomina razón entre dos segmentos, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, al cociente entre la longitud del segmento $\overline{AB}$ y la longitud del segmento $\overline{CD}$ y se escribe $\frac{AB}{CD}$.

¡TEN EN CUENTA!

Para referirnos a un segmento que va desde el punto *A* hasta el punto *B* escribimos $\overline{AB}$ y para referirnos a la longitud del segmento $\overline{AB}$ escribimos *AB*.

Ejemplo 3.

La razón entre los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de la siguiente figura es $\frac{AB}{CD}=\frac{3\text{ cm}}{6\text{ cm}}=\frac{1}{2}$.



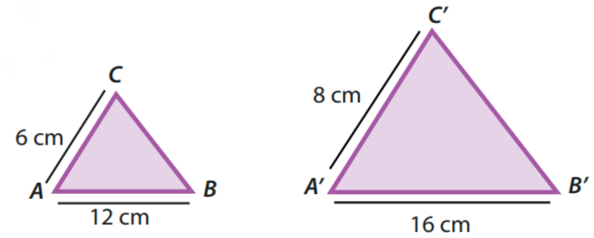
■

Segmentos proporcionales

Dos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son proporcionales a otros dos $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ si $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$.

Ejemplo 4.

Compare las medidas de los segmentos correspondientes en la pareja de triángulos y compruebe si los segmentos comparados son proporcionales.



Solución.

$$\frac{AB}{AC}=\frac{12\text{ cm}}{6\text{ cm}}=\frac{12}{6}=2$$

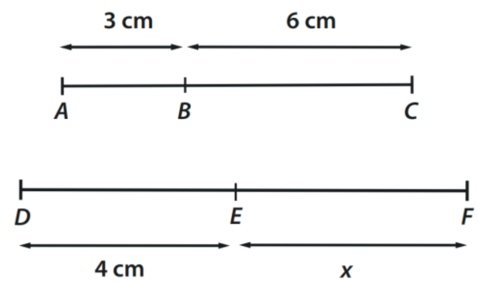
$$\frac{A'B'}{A'C'}=\frac{16\text{ cm}}{8\text{ cm}}=\frac{16}{8}=2$$

■

Como $\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$, los segmentos son proporcionales.

Ejemplo 5.

Encuentre el valor *x* del segmento dado en cada caso para que la proporción $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$, sea correcta.



Solución.

$$\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}\Rightarrow\frac{3\text{ cm}}{6\text{ cm}}=\frac{4\text{ cm}}{x}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{6}=\frac{4\text{ cm}}{x}\Rightarrow 3\cdot x=6\cdot 4\text{ cm}$$

$$\Rightarrow 3x=24\text{ cm}\Rightarrow x=\frac{24\text{ cm}}{3}=8\text{ cm}$$

■

Medidas de dispersión

PENSAMIENTO ALEATORIO

Las **medidas de dispersión** son parámetros de centralización que miden la separación de los datos de una distribución respecto a su media. Las más utilizadas son el **rango** o **recorrido**, la **desviación media**, la **varianza** y la **desviación típica**.

Consideremos la siguiente situación

Juan compara los salarios de dos pequeñas empresas a partir de los sueldos de cinco personas que trabajan en diferentes áreas. Los sueldos de estos empleados se muestran en la Tabla 1.

Compañía *A*	Compañía *B*
\$1200	\$2300
\$1800	\$2400
\$1800	\$2500
\$3000	\$2500
\$4500	\$2600

Tabla 1

¿Se puede decir que los salarios en las dos empresas son similares?

Juan toma los cinco salarios de los empleados a los que entrevistó en cada empresa y halla la media correspondiente.
El promedio salarial de la compañía *A* es:

$$\frac{1200+1800+1800+3000+4500}{5}=2460$$

El promedio salarial en la compañía B es:

$$\frac{2300+2400+2500+2500+2600}{5}=2460$$

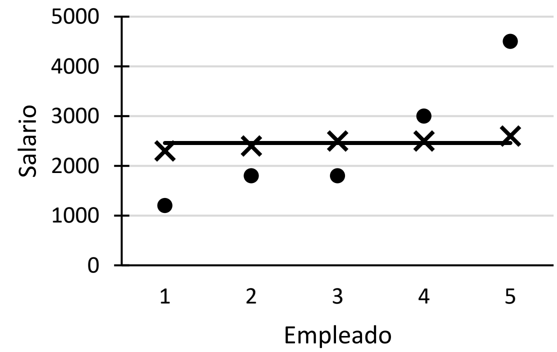
Las dos compañías tienen el mismo promedio o media aritmética. Sin embargo, se observa que los salarios de la compañía *A* se alejan más de la media que los de la compañía *B*. Se dice entonces que los datos salariales de la compañía *A* son muy dispersos, mientras que los de la compañía *B* son poco dispersos.

Rango
El **rango** o **recorrido** de un conjunto de datos es la diferencia entre el mayor y el menor valor de los datos. Si los datos están agrupados en clases, el rango se calcula como la diferencia entre el extremo superior del último intervalo y el extremo inferior del primero.

Ejemplo 6.

Los rangos de los salarios de las compañías de la situación inicial son:
Compañía *A*: $\$4500-\$1200=\$3300$
Compañía *B*: $\$2600-\$2300=\$300$

Los puntos negros del diagrama de dispersión de la figura de abajo representan los salarios de la compañía *A;* las cruces, los de la compañía *B* y la línea horizontal representa el promedio. Nótese que las cruces están todas más cercanas a la línea horizontal que los puntos.



Desviación media
La desviación respecto a la media es la diferencia entre cada valor de la variable estadística y la media aritmética.

Para calcular la desviación media de un conjunto de datos:
1. Se hallan las desviaciones respecto a la media: $\text{dato}-\text{media}$
2. Se calculan los valores absolutos de las desviaciones: $|\text{dato}-\text{media}|$
3. Se encuentra la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones.

Ejemplo 7.

Las estaturas, en centímetros, de los jugadores de dos equipos de baloncesto son:

Equipo *A*: 190, 192, 195, 198, 200
Equipo *B*: 170, 175, 195, 215, 220

Estatura media del equipo *A*:

$$\frac{190+192+195+198+200}{5}=195$$

Estatura media del equipo *B*:

$$\frac{170+175+195+215+220}{5}=195$$

Las tablas siguientes presentan las desviaciones con respecto a la media y sus valores absolutos.

Equipo A		
Datos	Dato − media	$\lvert$dato − media$\rvert$
190	$190-195=-5$	$\lvert -5\rvert=5$
192	$192-195=-3$	$\lvert -3\rvert=3$
195	$195-195=0$	$\lvert 0\rvert=0$
198	$198-195=3$	$\lvert 3\rvert=3$
200	$200-195=5$	$\lvert 5\rvert=5$
		Suma: 16

Equipo B		
Datos	Dato − media	$\lvert$dato − media$\rvert$
170	$170-195=-25$	$\lvert -25\rvert=25$
175	$175-195=-20$	$\lvert -20\rvert=20$
195	$195-195=0$	$\lvert 0\rvert=0$
215	$215-195=20$	$\lvert 20\rvert=20$
220	$220-195=25$	$\lvert 25\rvert=25$
		Suma: 90

Las desviaciones medias de las estaturas de los equipos A y B son:

Equipo A: $\dfrac{5+3+0+3+5}{5}=\dfrac{16}{5}=3{,}2$

Equipo B: $\dfrac{25+20+0+20+25}{5}=\dfrac{90}{5}=18$

Como la desviación media del equipo B es mayor que la del equipo A, entonces las estaturas de los integrantes del equipo B están más dispersas que las del equipo A. ■

Producto cartesiano

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Par ordenado

El par ordenado (a,b) es la colección ordenada en la que a es su primer elemento y b es el segundo elemento.

Decimos que dos pares ordenados son iguales si, y sólo si, cada par correspondiente de sus elementos es igual. En otras palabras $(a,b)=(c,d)$ si, y sólo si $a=c$ y $b=d$.

Producto cartesiano

Sean A y B dos conjuntos. El producto cartesiano de A y B, denotado por $A\times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados (a,b) donde $a\in A$ y $b\in B$, es decir:

$$A\times B=\{(a,b):a\in A\ \wedge\ b\in B\}$$

Ejemplo 8.

Dados los conjuntos $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{a,b\}$, hallemos $A\times B$ y $B\times A$.

Solución.

El conjunto $A\times B$ corresponde a todas las parejas ordenadas posibles cuyo primer elemento pertenece al conjunto A y cuyo segundo elemento pertenece al conjunto B, es decir

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

El conjunto $B\times A$ corresponde a todas las parejas ordenadas posibles cuyo primer elemento pertenece al conjunto B y cuyo segundo elemento pertenece al conjunto A, es decir

$$B\times A=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}\qquad ■$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

PENSAMIENTO NUMÉRICO-VARIACIONAL

1. Realice las operaciones indicadas

a. $\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

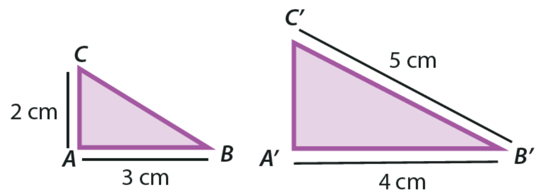
b. $5\sqrt{450}-5\sqrt{800}-2\sqrt{320}$

c. $-3\sqrt{2ab^2}+12\sqrt{18a^3}-5b\sqrt{2a}-\sqrt{2a^3}$

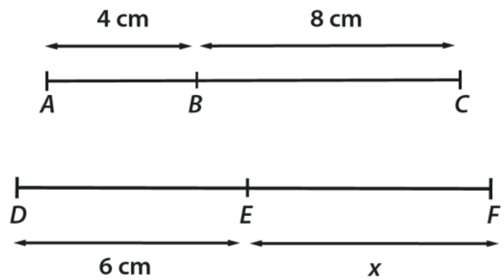
d. $2a\sqrt[3]{81y}-a\sqrt[3]{24y}+5a\sqrt[3]{192y}$

PENSAMIENTO GEOMÉTRICO-MÉTRICO

2. Compare las medidas de los segmentos correspondientes en la pareja de triángulos y compruebe si los segmentos comparados son proporcionales.



3. Encuentre el valor x del segmento dado en cada caso para que la proporción $\frac{AB}{CD}=\frac{EF}{GH}$, sea correcta.



PENSAMIENTO ALEATORIO

4. Calcula el rango de cada conjunto de datos.

a. 3, 4, 10, 23, 8, 0, 15, 16, 67, 69, 4

b. 28, 32, 25, 35, 28, 25, 30, 35, 29, 29, 25, 35, 35, 30, 28, 30, 30, 28

5. Determina cuál de los siguientes conjuntos de datos tiene mayor dispersión.

a. 2, 6, 3, 8, 10, 32, 15
b. 110, 112, 111, 113, 111, 110, 111

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

6. Sean $A=\{a,b,c,d\}$ y $B=\{y,z\}$. Obtén

a. $A\times B$
b. $B\times A$

Operaciones con radicales. Multiplicación y división

PENSAMIENTO NUMÉRICO-VARIACIONAL

Para multiplicar o dividir radicales primero se expresan como potencias y luego se aplican las propiedades de la potenciación para simplificar el resultado.

¡RECUERDE!

- Si se multiplican potencias de igual base, se deja la misma base y se suman los exponentes. Por ejemplo: $2^2\cdot 2^3=2^{2+3}=2^5$
- Si se dividen potencias de igual base, se deja la misma base y se restan los exponentes (el de arribe menos el de abajo). Por ejemplo: $2^2\div 2^3=\frac{2^2}{2^3}=2^{2-3}=2^{-1}$.
- Si una potencia se eleva a otra potencia, lo único que debe hacerse es multiplicarse los exponentes. Por ejemplo: $\left(2^2x^3y\right)^4=\left(2^2x^3y^1\right)^4=2^{2\cdot 4}x^{3\cdot 4}y^{1\cdot 4}=2^8x^{12}y^4$

Ejemplo 1.

Resolvamos $\sqrt{2x}\cdot\sqrt[3]{2x^2}$.

Solución.

Recuerde que $\sqrt{\ }$ *es lo mismo que* $\sqrt[2]{\ }$ *y que si una expresión no tiene exponente puede ponérsele exponente 1.*

$$\sqrt{2x}\cdot\sqrt[3]{2x^2}=\sqrt[2]{2^1x^1}\cdot\sqrt[3]{2^1x^2}$$

Cuando se saca del radical una cantidad siempre debe ponerse en el numerador el exponente (dentro del radical) y en el denominador el índice (fuera del radical).

$$=2^{1/2}\cdot x^{1/2}\cdot 2^{1/3}\cdot x^{2/3}$$

Se acomodan gracias a la propiedad conmutativa.

$$=2^{1/2}\cdot 2^{1/3}\cdot x^{1/2}\cdot x^{2/3}$$

Se suman los exponentes de las bases iguales

$$=2^{1/2+1/3}x^{1/2+2/3}$$

Se hacen las operaciones: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$ *y* $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3+4}{6}=\frac{7}{6}$.

$$=2^{5/6}x^{7/6}$$

El numerador del exponente va dentro del radical y el denominador, afuera para convertir los resultados en radicales.

$$=\sqrt[6]{2^5}\,\sqrt[6]{x^7}$$

Si los radicales tienen el mismo signo se pueden combinar en un solo radical

$$=\sqrt[6]{2^5x^7}$$

Como el exponente de la x es mayor que el índice se descompone en dos potencias para sacar una parte del radical

$$=\sqrt[6]{2^5x^6x^1}$$

El exponente 1 se puede quitar, se saca del radical (el exponente) la x que tiene el exponente igual al índice y se calcula $2^5=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=32$.

$$=x\sqrt[6]{32x}$$

Ejemplo 2.

Resolvamos $\dfrac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{12}}{\sqrt{6}}$.

Solución.

Primero expresamos cada raíz como potencia.

$$\frac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{12}}{\sqrt{6}}=\frac{9^{1/3}\cdot12^{1/4}}{6^{1/2}}$$

Como 9, 6 y 12 no son números primos, se descomponen. Esto debe hacerse siempre que se tengan números no primos.

$$\begin{array}{r|l}9&3\\3&3\\1&\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}6&2\\3&3\\1&\end{array}\qquad\begin{array}{r|l}12&2\\6&2\\3&3\\1&\end{array}$$

Entonces: $9=3\cdot3=3^2, 6=2\cdot3$ *y* $12=2\cdot2\cdot3=2^2\cdot3$

$$=\frac{\left(3^2\right)^{1/3}\cdot\left(2^2\cdot3\right)^{1/4}}{\left(2\cdot3\right)^{1/2}}$$

El exponente que está fuera de los paréntesis afecta todo lo que se encuentra dentro por eso lo distribuiremos.

$$=\frac{\left(3^2\right)^{1/3}\cdot\left(2^2\right)^{1/4}\cdot\left(3\right)^{1/4}}{\left(2\right)^{1/2}\cdot\left(3\right)^{1/2}}$$

Como se está elevando a un exponente una expresión que ya tiene exponente, se multiplican los exponentes.

$$=\frac{3^{2\cdot1/3}\cdot2^{2\cdot1/4}\cdot3^{1/4}}{2^{1/2}\cdot3^{1/2}}$$

Se hacen las operaciones: $2\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ *y* $2\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

$$=\frac{3^{2/3}\cdot2^{1/2}\cdot3^{1/4}}{2^{1/2}\cdot3^{1/2}}$$

Se usa la propiedad conmutativa para acomodar los factores.

$$=\frac{2^{1/2}\cdot3^{2/3}\cdot3^{1/4}}{2^{1/2}\cdot3^{1/2}}$$

Se suman los exponentes de las bases iguales: $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8+3}{12}=\frac{11}{12}$.

$$=\frac{2^{1/2}\cdot3^{11/12}}{2^{1/2}\cdot3^{1/2}}$$

Se restan los exponentes de las bases iguales:

$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ *y* $\frac{11}{12}-\frac{1}{2}=\frac{22-12}{24}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$.

$$=2^0\cdot3^{5/12}$$

Todo número diferente de cero elevado al exponente cero es igual 1. Se expresa la potencia como raíz.

$$=1\sqrt[12]{3^5}$$

El coeficiente uno suele no escribirse y $3^5=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=243$.

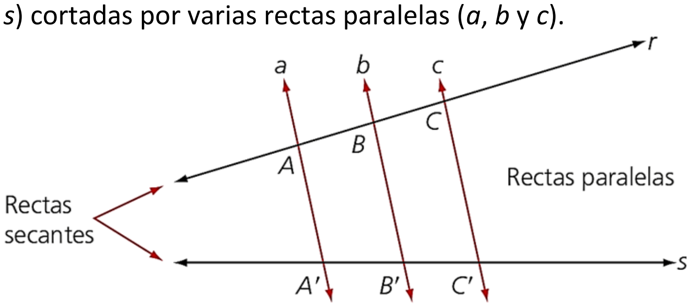
$$=\sqrt[12]{243}$$

Teorema de Tales

PENSAMIENTO GEOMÉTRICO-MÉTRICO

Si dos rectas secantes son cortadas por tres o más rectas paralelas, entonces los segmentos determinados sobre las rectas secantes son proporcionales.

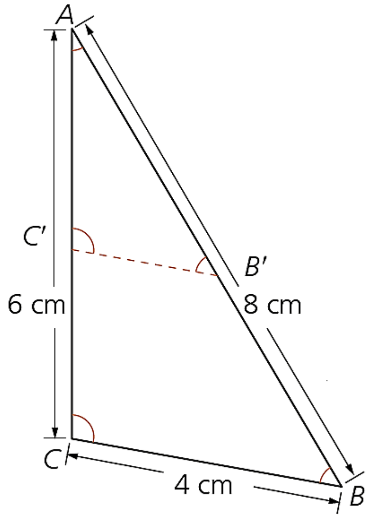
En la siguiente figura se observan dos rectas secantes (*r* y *s*) cortadas por varias rectas paralelas (*a*, *b* y *c*).



Según el teorema de Tales, los segmentos determinados sobre la recta *r* son proporcionales a los segmentos determinados sobre la recta *s*. Es decir:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$$

Por el teorema de Tales podemos afirmar también que, si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes, como lo muestra la siguiente figura.

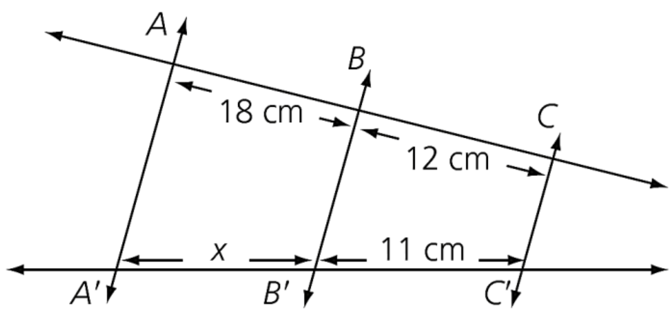


Nota que los segmentos $\overline{B'C'}$ y $\overline{BC}$ son paralelos y cortan los dos segmentos secantes $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ son secantes entre sí.

Entonces: $\dfrac{AB'}{AB}=\dfrac{AC'}{AC}=\dfrac{B'C'}{BC}$.

Ejemplo 3.

Calcula la longitud del segmento $\overline{A'B'}$ de la siguiente figura, si $\overleftrightarrow{AA'}\,||\,\overleftrightarrow{BB'}\,||\,\overleftrightarrow{CC'}$.



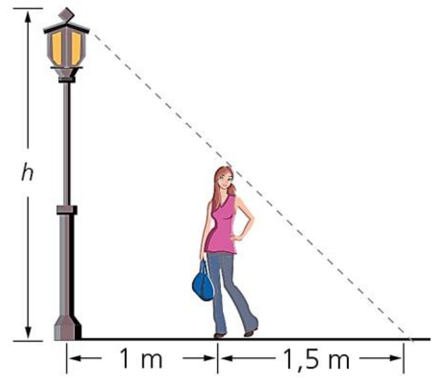
Solución.

Los segmentos determinados entre las rectas $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ cumplen con las condiciones del teorema de Tales. Entonces:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}\Rightarrow\frac{18\text{ cm}}{x}=\frac{12\text{ cm}}{11\text{ cm}}$$
$$\Rightarrow\frac{18\text{ cm}}{x}=\frac{12}{11}$$
$$\Rightarrow 12\cdot x=11\cdot 18\text{ cm}$$
$$\Rightarrow 12\cdot x=198\text{ cm}$$
$$\Rightarrow x=\frac{198\text{ cm}}{12}=16{,}5\text{ cm}$$

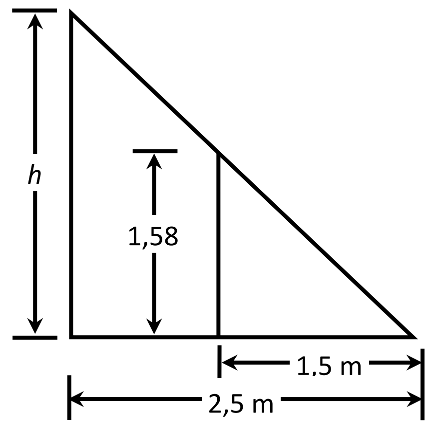
Ejemplo 4.

Sabiendo que Patricia tiene una altura de 158 cm, halla la altura de la farola de la figura.



Solución.

Podemos considerar a Patricia como un segmento de 158 cm paralelo a la farola de altura *h*. A continuación, se presenta un esquema de la situación.



Por el teorema de Tales podemos escribir:

$$\frac{2{,}5\text{ m}}{1{,}5\text{ m}}=\frac{h}{1{,}58\text{ m}}\Rightarrow\frac{2{,}5}{1{,}5}=\frac{h}{1{,}58\text{ m}}$$
$$\Rightarrow 1{,}5\cdot h=2{,}5\cdot 1{,}58\text{ m}$$
$$\Rightarrow 1{,}5\cdot h=3{,}95\text{ m}$$
$$\Rightarrow h=\frac{3{,}95\text{ m}}{1{,}5}=2{,}63\text{ m.}$$

La farola mide 2,63 aproximadamente.

Medidas de dispersión. Varianza y desviación típica

PENSAMIENTO ALEATORIO

La **varianza** de una distribución estadística es la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones respecto de la media. Se representa por s^2 y está dada por la expresión:

$$s^2 = \frac{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2}{n}$$

donde x_1 es el primer dato, x_2 es el segundo dato y así sucesivamente, $\overline{x}$ es la media aritmética y n es el número total de datos.

La **desviación típica** es la raíz cuadrada positiva de la varianza, es decir, s.

Ejemplo 5.
Halla la varianza y la desviación típica de las edades 4, 8, 2 y 9.

Solución.
Primero, calculamos la media:

$$\overline{x} = \frac{4+8+2+9}{4} = \frac{23}{4} = 5{,}75$$

Luego, llenamos la siguiente tabla:

Edad x_i	$x_i-\overline{x}$	$(x_i-\overline{x})^2$
2	$2-5{,}75=-3{,}75$	$(-3{,}75)^2=14{,}0625$
4	$4-5{,}75=-1{,}75$	$(-1{,}75)^2=3{,}0625$
8	$8-5{,}75=2{,}25$	$(2{,}25)^2=5{,}0625$
9	$9-5{,}75=3{,}25$	$(3{,}25)^2=10{,}5625$
Suma	0	32,75

La varianza es $s^2=\frac{32{,}75}{4}=8{,}1875$ y la desviación estándar es $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{8{,}1875}=2{,}86$.

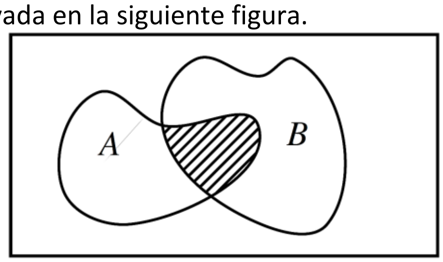
Operaciones entre conjuntos

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

Intersección de conjuntos
La intersección de dos conjuntos A y B, denotada por $A\cap B$, es el conjunto de todos los elementos que están tanto en A como en B, es decir, los elementos que tienen en común ambos conjuntos.

Simbólicamente: $A\cap B=\{x : x\in A \wedge x\in B\}$.

Gráficamente la intersección de los conjuntos A y B es la región rayada en la siguiente figura.

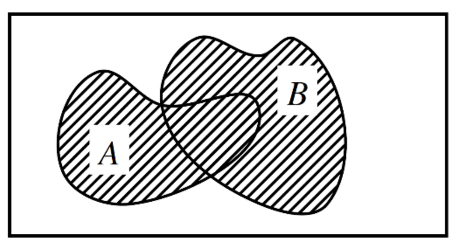


$A\cap B$

Unión de conjuntos
La unión de dos conjuntos A y B, denotada por $A\cup B$, es el conjunto de todos los elementos de A junto con todos los elementos de B, un conjunto que reúne los elementos de ambos conjuntos sin repetir ninguno de ellos.

Simbólicamente: $A\cup B=\{x : x\in A \vee x\in B\}$.

Gráficamente la unión de los conjuntos A y B es la región rayada en la siguiente figura.



$A\cup B$

Complemento de un conjunto
Si A es subconjunto de un conjunto universal U, el conjunto de elementos de U que no están en A se denomina complemento de A y lo denotamos con A'.

Simbólicamente: $A'=\{x : x\in U \wedge x\notin A\}$

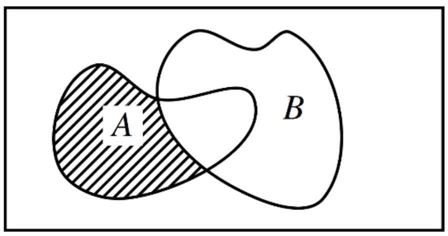
Diferencia de conjuntos

La diferencia entre los conjuntos *A* y *B*, denotada por $A-B$, es el conjunto de todos los elementos de *A* que no están en *B*, mientras que la diferencia denotada por $B-A$ es el conjunto de todos los elementos de *B* que no están en *A*.

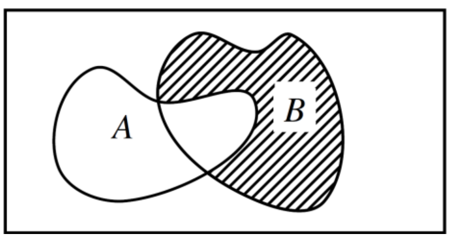
Simbólicamente:

$A-B=\{x: x\in A \wedge x\notin B\}$ y $B-A=\{x: x\in B \wedge x\notin A\}$

Gráficamente la diferencia de los conjuntos *A* y *B* es la región rayada en la siguiente figura.



$A-B$



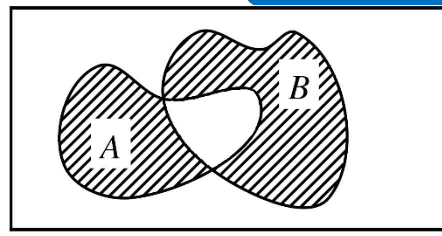
$B-A$

Diferencia simétrica

La diferencia simétrica de dos conjuntos *A* y *B*, denotada por $A\Delta B$, es el conjunto de todos los elementos que están en *A* o en *B* pero no están en ambos, es decir, es la unión de *A* y *B* sin tener en cuenta los que están en la intersección.

Simbólicamente: $A\Delta B=\{x: x\in A\cup B \wedge x\notin A\cap B\}$

Gráficamente la diferencia simétrica de los conjuntos *A* y *B* es la región rayada en la siguiente figura.



$A\Delta B$

Ejemplo 6.

Sean los conjuntos *A*, *B* y *C* subconjuntos del conjunto de los números naturales, es decir, $U=\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\ldots\}$. Determinar los siguientes conjuntos teniendo en cuenta que $A=\{x: 5<x\leq 10\}$, $B=\{3,4,5,6\}$ y $C=\{x: x>10\}$.

a. $A\cup B$ b. $B\cap C$ c. A'
d. $A-B$ e. $A\Delta B$ f. $B-C$

Solución.

En este ejercicio hay que tener en cuenta que:

- En el conjunto A están todos los números naturales desde el 5 hasta el 10 sin incluir al 5 pero incluyendo al 10, es decir: $A=\{5,6,7,8,9\}$.
- El conjunto *C* está formado por todos los números naturales mayore que 10, es decir: $C=\{11,12,13,14,\ldots\}$.

a. $A\cup B=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ Note que en *A* y en *B* están los números 5 y 6, pero en la unión no se escriben dos veces.

b. $B\cap C=\{\ \}=\varnothing$ Los conjuntos *B* y *C* no tienen ningún elemento en común, no comparten entre ellos ningún elemento.

c. *A'* es el conjunto de todos los números naturales que no están en *A*, es decir: $A'=\{1,2,3,4,10,11,12,13,14,15,\ldots\}$

d. $A-B=\{7,8,9\}$ Solo los que están *A* pero no en *B*.

e. $A\Delta B=\{3,4,7,8,9\}$ Aquí no pueden estar 5 y 6 porque ambos aparecen en los dos conjuntos.

f. $B-C=\{3,4,5,6\}=B$ Ningún elemento de *B* está en *C*, por eso todo *B* es igual a $B-C$.

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

PENSAMIENTO NUMÉRICO-VARIACIONAL

1. Realiza las siguientes operaciones.

a. $\sqrt[3]{5x^2}\cdot\sqrt{3x}$ b. $\sqrt[4]{x^3y}\cdot\sqrt{xy}$

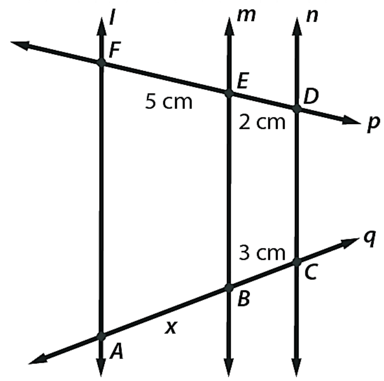
c. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$ d. $\dfrac{\sqrt[3]{2ab}}{\sqrt[4]{3b^2}}$

Tercera semana

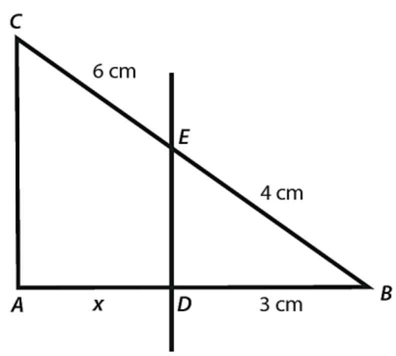
PENSAMIENTO GEOMÉTRICO-MÉTRICO

2. Calcule las longitudes que están marcadas con la letra x en cada una de las figuras.

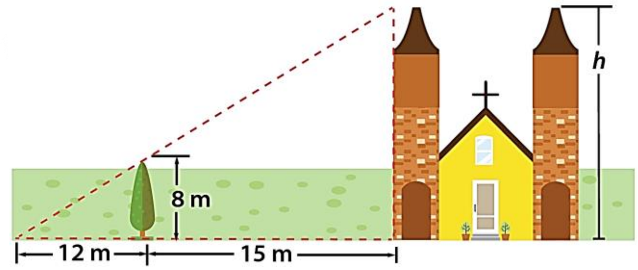
a.



b.



3. Calcule la altura de la torre de la iglesia que se muestra en la figura teniendo en cuenta los datos dados.



PENSAMIENTO ALEATORIO

4. Los jugadores de dos equipos de fútbol se pesaron. Los datos, en kilogramos, se muestran a continuación.
Equipo *A*: 72, 65, 71, 56, 59, 63, 61, 70
Equipo *B*: 61, 82, 84, 73, 77, 70, 69, 68

a. Calcula el recorrido de cada equipo.
b. Calcula la media en cada equipo.
c. Calcula la desviación media para cada equipo.
d. ¿Qué equipo tiene los datos más dispersos?

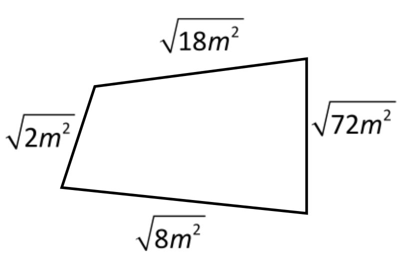
Cuarta semana

Taller de profundización

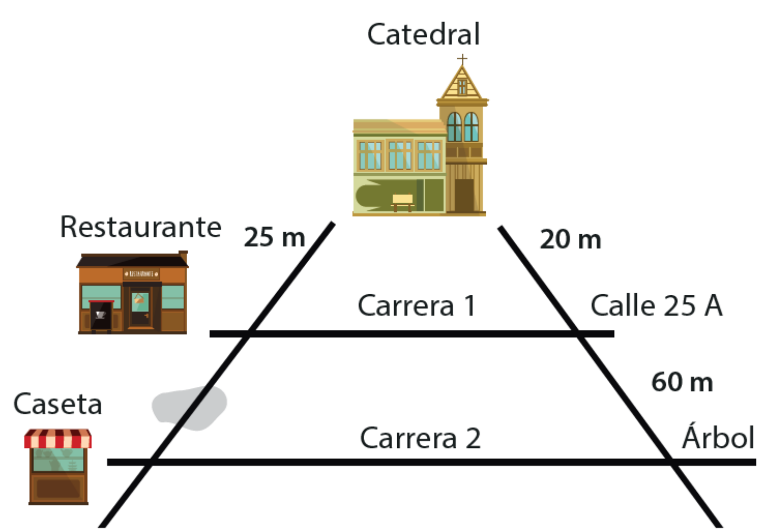
1. Explique por qué las siguientes expresiones no tienen radicales semejantes: $4\sqrt{2x}$ y $4\sqrt{2x}$.

2. Escriba dos expresiones con radical semejante al de la expresión $5a\sqrt[3]{x^2y}$.

3. Halle el perímetro del cuadrilátero siguiente:



4. En el dibujo que representa el parque Centenario de la ciudad de Quibdó, se ve que la carrera 1 es paralela a la carrera 2. Entre el restaurante y la caseta se ha derramado un poco de tinta la cual ha borrado la distancia. ¿Es posible hallar esa distancia con la información que se tiene?



5. Trace dos rectas *p* y *q* (que no sean paralelas) y realice el siguiente procedimiento:

- Marque tres puntos *A*, *B* y *C* sobre la recta *p* que estén separados así: entre *A* y *B* debe haber 2 cm, entre *B* y *C* debe haber 3 cm.

- Trace tres rectas paralelas entre sí que pasen por los puntos *A*, *B* y *C*, respectivamente. Determine los puntos de corte correspondientes en la recta *q* márquelos como *A*1, *B*1 y *C*1.

- Mida cuidadosamente con la regla los diferentes segmentos obtenidos y compruebe que se cumple el Teorema de Tales. Escriba las proporciones.

6. En la nota definitiva de la asignatura de inglés, cada estudiante tiene cinco valoraciones. Las valoraciones de Andrés fueron: 7, 8, 9, 10, 6 y se sabe que Mariana sacó la misma definitiva, pero no tuvo las mismas notas. Escribe dos posibles grupos de valoraciones de Mariana.

7. Encuentra el dato que falta en cada conjunto de datos para que se cumpla la condición.

a. 5, 7, 6, 5, 4, 3, 7, 6, 5, *x*. La moda es 5.

b. 21, 10, 16, 18, *x*, 23, 12, 14. La mediana es 16.

8. Clasifica cada afirmación como verdadera (V) o falsa (F).

a. El rango de un conjunto de datos puede ser negativo. (   )

b. La desviación típica de un conjunto de datos puede ser 0. (   )

c. La varianza siempre es menor que la desviación típica. (   )

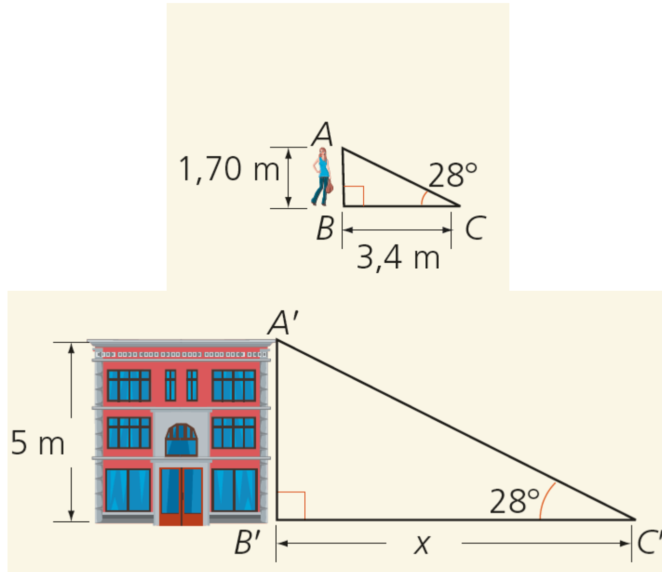
d. Dos conjuntos con igual rango tienen igual dispersión. (   )

9. El largo, en centímetros, de seis cubiertos de plástico producidos en dos máquinas diferentes son los siguientes.

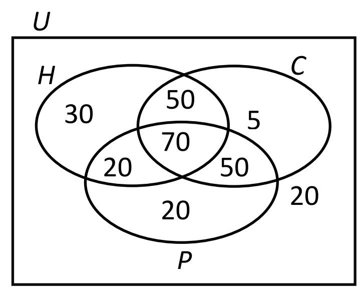
Máquina A: 12,1–12–12,2–11,9–11,9–12
Máquina B: 12,2–12,3–11,8–12–11,7–12

¿Cuál de las máquinas debe utilizar una empresa que desea fabricar cubiertos con la menor variabilidad en los tamaños?

10. En la Figura se observa que, a cierta hora del día, una persona de 1,70 m de estatura proyecta una sombra de3,4 m. ¿Cuánto mide la sombra que proyecta a la misma hora un edificio de 5 m de altura?



11. La figura siguiente muestra el número de estudiantes que pertenecen a los clubes *H*, *C* y *P*.



a. ¿Cuántos estudiantes no están en ningún club?

b. ¿Cuántos estudiantes están en el club H?

c. ¿Cuántos estudiantes están a la vez en los tres clubes?

12. En un restaurante se sirven cuatro entremeses, r = costillas, n = nachos, s = camarones, f = queso fundido y tres entradas, $c = pollo$, $b = res$, $t = trucha$.

Sea $A = \{r, n, s, f\}$ y $E = \{c, b, t\}$, Utilice el producto cartesiano para determinar todas las cenas posibles.

13. Un grupo de 4 amigos quiere saber cuántos grupos diferentes de 1, 2, 3 y 4 personas pueden formar en total entre ellos. ¿Cómo podrías ayudarlos a saber la cantidad? ¿Qué procedimiento usarías?